

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آن‌گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. یعنی:

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

یادآوری: به اتحادهای زیر توجه کنید:

۱) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ اتحاد مزدوج:

۲) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ اتحاد یک جمله مشترک

تذکر: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر مجموع ضرایب معادله صفر باشد (یعنی $a + b + c = 0$)،

آن‌گاه یک ریشه معادله ۱ و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ است.

تذکر: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $a + c = b$ باشد، آن‌گاه یک ریشه معادله -1 و ریشه دیگر

$\frac{-c}{a}$ است.



مثال) معادلات زیر را حل کنید.

۱) $2x^2 - 5x = 0$

۲) $x^2 + 5x - 24 = 0$

۳) $(x + 3)^2 - 4 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به دست آورید.

الف) $5x^2 = 20$ ب) $t^2 + 7 = 0$ پ) $(r - 2)^2 = 16$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

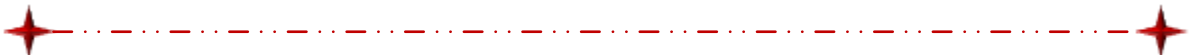
◀ عدد ثابت را به سمت راست تساوی برده

◀ اگر ضریب x^2 عددی غیر از ۱ باشد همه تساوی را بر آن تقسیم کرده

◀ $\frac{b^2}{4}$ را به طرفین تساوی اضافه کرده

◀ بعد از انجام مرحله قبل سمت چپ تساوی تبدیل به اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌شود.

◀ و مرحله آخر از روش ریشه‌گیری معادله را حل کرده



ترکیب مسئله و درجه دوم

مثال) از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ مترمربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

.....

.....

.....

.....



تمرین‌های کتاب

معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $x^2 - 11x = -10$

۲) $5t^2 = 20$

۳) $5a^2 - 7a = 2a(a - 3)$

۴) $4k^2 - 12k + 8 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $s^2 - 3s + 3 = 0$

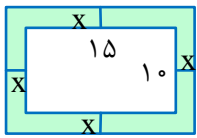
۲) $x^2 - 6x = 7$

۳) $2a^2 + 5a - 3 = 0$

۴) $r^2 + 4r + 4 = 0$

اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



مسائل خارج از کتاب

اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 4m^2x + 5m - 1 = 0$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای x کدام است؟

- (۱) $-\frac{25}{4}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) -۲

.....

.....

.....

.....

به ازای چه مقدار a ، ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - a + 1 = 0$ مساوی‌اند؟

- (۱) $-\frac{17}{8}$ (۲) $-\frac{17}{2}$ (۳) $-\frac{7}{2}$ (۴) $-\frac{7}{18}$

.....

.....

.....

.....

به ازای کدام مقادیر a ، معادله درجه دوم $x^2 + 3ax + 1 = 0$ جواب ندارد؟

- (۱) هر مقدار a (۲) هیچ مقدار a (۳) فقط $a = \pm \frac{3}{2}$ (۴) $\frac{-3}{2} < a < \frac{3}{2}$

.....

.....

.....

.....

به ازای چه مقادیری از m ، معادله $x^2 - 3x + m - 4 = 0$ دو جواب حقیقی متمایز دارد؟

$$m < \frac{25}{4} \quad (4) \quad m > \frac{-15}{8} \quad (3) \quad m > \frac{15}{4} \quad (2) \quad m < \frac{-25}{8} \quad (1)$$

اگر معادله $(m-1)x^2 + 2mx - m = 0$ ریشه مضاعف مثبت داشته باشد، این ریشه مضاعف کدام است؟

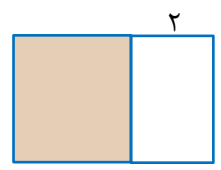
$$\frac{3}{4} \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (1)$$

معادله $3x^2 - 17x - 20 = 0$ را به کمک روش سریع کامل به شکل $(x-a)^2 = b$ در آورده‌ایم. مقدار

$2a + \sqrt{b}$ کدام است؟

$$12/5 \quad (4) \quad 11/5 \quad (3) \quad 10/5 \quad (2) \quad 9/5 \quad (1)$$

در شکل زیر، مساحت مربع از $\frac{3}{4}$ مساحت مستطیل بزرگ‌تر، ۱۸ واحد مربع بیشتر است. محیط مستطیل بزرگ‌تر



کدام است؟

- (۱) ۴۴
- (۲) ۴۸
- (۳) ۵۲
- (۴) ۵۴

در حل معادله $3x^2 + 13x - 3 = 0$ به روش مربع کامل، از چه عددی جذر گرفته می‌شود؟

- (۱) $\frac{169}{36}$
- (۲) $\frac{205}{36}$
- (۳) $\frac{169}{9}$
- (۴) $\frac{178}{9}$

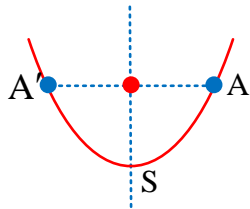


* عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac - b^2}{4as}$ را می‌توانید از قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادله سهمی به دست آورید.

نکته: اگر دو نقطه روی یک سهمی داشته باشیم که y های آن‌ها با هم برابر باشند میانگین طول‌های آن‌ها همان طول رأس سهمی است.

تذکر: با توجه به نمودار زیر، قرینه هر نقطه سهمی نسبت به محور تقارن، بر روی خود سهمی قرار دارد. به عبارت

دیگر:



$$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_S$$

هر سهمی به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله

$$y = (x + 1)^2 - 2 \quad \text{دارد } x = h$$



نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$$y = 3x^2 - 2$$

$$y = -(x + 1)^2 - 3$$

$$y = \frac{x^2}{2} + x - 4$$

$$y = x - x^2$$

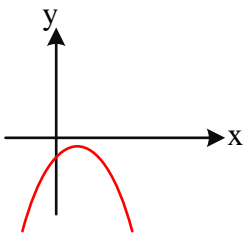
اگر $(-۲, ۵)$ و $(۰, ۵)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاط به طول -۱ و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.



سوالات خارج از کتاب

با توجه به نمودار شکل زیر، معادله سهمی کدام می‌تواند باشد؟



$$y = \frac{5}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$y = \frac{5}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$y = \frac{5}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$y = \frac{5}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \quad (۳)$$

سه‌می $y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ با خط $y = 13 - x$ ، در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۸، متقاطع‌اند. مختصات رأس

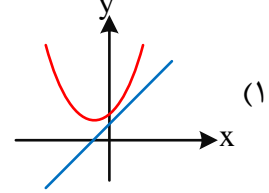
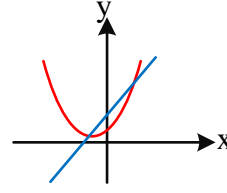
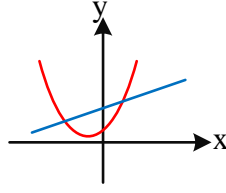
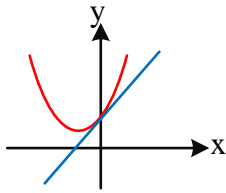
این سه‌می، کدام است؟

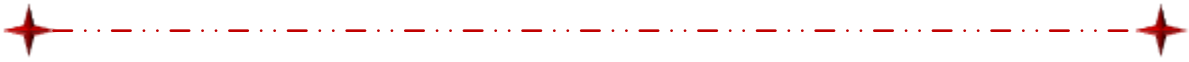
- (۱) (۱, ۹) (۲) (۳, ۹) (۳) (۳, ۱۲) (۴) (۴, ۱۳)

فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بر سه‌می $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند، این سه‌می، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

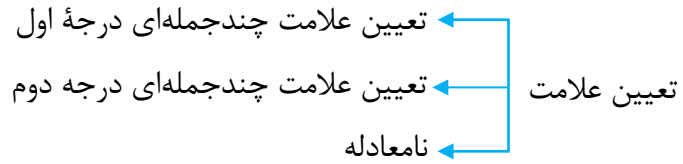
- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$

وضعیت سهمی $y = x^2 + x + 2$ و خط $y = 2x + 1$ به کدام صورت است؟





درس سوم: تعیین علامت



تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول

خط $y = ax + b$ را در نظر بگیرید، علامت دو جمله‌ای $ax + b$ (a و b اعداد حقیقی و ثابت‌اند) با رسم نمودار

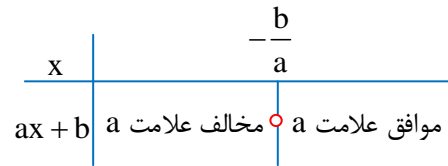
این خط، به صورت زیر خواهد بود.

$y = ax + b$
ریشه معادله $a > 0$
 $\frac{-b}{a}$

بعد از ریشه، $y > 0$
قبل از ریشه، $y < 0$

ریشه معادله $a < 0$
 $\frac{-b}{a}$
 $y = ax + b$

بعد از ریشه، $y < 0$
قبل از ریشه، $y > 0$



مثال) عبارت $A = -5x + 10$ را تعیین کنید. به ازای چه مقادیری از x، عبارت منفی است؟

.....

.....

.....

.....

علامت عبارت $A = (2x - 1)(3 - x)$ را برای xهای مختلف تعیین می‌کنیم.

.....

.....

.....

.....

تعیین علامت معادله درجه دوم

شرایط Δ	جدول تعیین علامت	نمودار سهمی در دو حالت a
$\Delta > 0$		<p>اگر $\Delta > 0$ باشد، بین دو ریشه، علامت عبارت همواره مخالف علامت a (ضریب x^2) است.</p>
$\Delta = 0$		<p>الف) اگر $\Delta = 0$ و $a > 0$، عبارت همواره نامنفی است و نمودار آن از بالا بر روی محور x قرار دارد. ب) اگر $\Delta = 0$ و $a < 0$، عبارت همواره نامثبت است و نمودار آن از پایین بر روی محور x قرار دارد.</p>
$\Delta < 0$		<p>الف) اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$، عبارت همواره مثبت است و نمودار آن بالای محور x هاست. ب) اگر $\Delta < 0$ و $a < 0$، عبارت همواره منفی است و نمودار آن پایین محور x هاست.</p>

عبارت $p(x) = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$A = (x^2 - 9)(3x - 1)$$

$$B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$$

نامعادله

نکته: اگر نامعادله‌ای را در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم کردید جهت نامعادله را عوض کنید.



نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

$$1 < 2x - 3 \leq 3$$

$$x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$$

مثال) نامعادله $\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$ را حل می‌کنیم.

نکات مهم درباره ریشه‌های صورت و مخرج

ریشه‌های مخرج همیشه از مجموعه جواب کنده میشه و ریشه‌های صورت اگر نامعادله مساوی داشت بمونه اگر نداشت کنده بشه.



نامعادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$$

نامعادله‌های قدرمطلق

دو ویژگی فوق‌العاده مهم قدرمطلق

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت:

۱- اگر $|u| \leq a$ ، آن‌گاه $-a \leq u \leq a$.

۲- اگر $|u| \geq a$ ، آن‌گاه $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

مثال) نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم.

الف) $|x - 3| \leq 2$

.....

.....

.....

ب) $|2x - 1| > 5$

.....

.....

.....

ج) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

.....

.....

.....

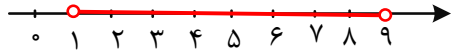
بازه (a, b) معادل نامساوی قدرمطلقى زیر است:

$$(a, b) \Leftrightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}$$

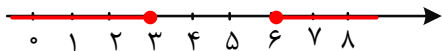
اگر یک بازه داشتیم از رابطه بالا، اگر دو بازه داشتیم جهت نامعادله عوض می‌شود.



یک نامعادله قدرمطلقى بنویسید که مجموعه جواب آن بازه $(1, 9)$ باشد.



یک نامعادله قدرمطلقى بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد.



به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟



تمرین‌های کتاب درسی

(۱) در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

ث) $x(x^2 + 4) < 0$

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3$

ح) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 3} \leq 0$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$

ج) $|7 - 2x| < 1$

پ) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$

ح) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

ت) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

Blank lined area for writing.

تعیین علامت یک خطی (فراتر از کتاب درسی)

ریشه ساده

ریشه مکرر

ریشه مکرر زوج

ریشه داخل قدرمطلق



$$P(x) = \frac{(9 - x^2)|x - 1|}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 2x - 3)}$$

$$P(x) = \frac{(x - 1)^2(x^2 - 4)}{|x + 1|(x^2 + x + 1)}$$

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ ، در بازه (a, b) پایین‌تر از خط به معادله $y = 2$ است. بیشترین مقدار

$b - a$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ∞

اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{(x-1)(x-2)^2}{x^2+x-3} \leq 0$ به صورت $(-\infty, a) \cup [1, b) \cup \{c\}$ باشد، حاصل abc

کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) -۳

اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x+6}{x^2+ax+b} \leq 0$ به صورت $(-\infty, -5) \cup [-3, 2)$ باشد، حاصل ab کدام است؟

- (۱) -۲۰ (۲) ۲۰ (۳) -۳۰ (۴) ۳۰

اگر تعیین علامت عبارت $A = ax + 8$ و $B = bx + a - 1$ به صورت زیر باشد، $a + b$ چقدر است؟

x	-2a	
A	+	-
	-2	(4)

x	a+b	
B	-	+
	2	(3)

(2) -1 (1) 1

اگر مجموعه جواب نامعادله $|x - a| \geq b$ به صورت $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد، a کدام است؟

(1) 4 (2) 3/5 (3) 4/5 (4) 3

مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۲)

(1) (0, 1) (2) (0, 3) (3) (1, 2) (4) (1, 3)

مجموعه جواب نامعادله $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ به صورت بازه، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۸)

(۲) (۲, ۴)

(۱) $(-4, 2) \cup (2, 3)$

(۴) $(-1, 2)$

(۳) $(-1, 2) \cup (2, 4)$

اگر تعیین علامت عبارت $p(x) = x^2 + ax - b$ به صورت زیر باشد، عبارت $a + b$ کدام است؟

x	-2a
A	+ -

(۲) -۹

(۱) ۳

(۴) ۱۵

(۳) -۱۵

اگر نمودار $f(x) = ax + b$ همواره بالای محور xها باشد، جدول تعیین علامت $y = ax^2 + bx + 1$ به کدام صورت است؟

x	α
P(x)	+ -

 (۴)

x	α
P(x)	- +

 (۳)

x	α	β
P(x)	- +	-

 (۲)

x	α	β
P(x)	+ -	+

 (۱)